

Statistiques - Fiche d'exercices n°2

À rendre le lundi avant votre TD, à l'adresse : gaspardabel@gmail.com

-> si vous n'arrivez pas à faire tous les exercices, aucun problème, mais envoyez vos pistes de réflexion (au propre si possible).

N'hésitez pas à me contacter par mail avant si vous avez des questions.

Exercice 1:

Soit X_1, X_2 des variables aléatoires de loi $\text{Ber}(p)$, iid.

Soit $T = X_1 + X_2$

a) Donner la loi de T : $\mathbb{P}(T=k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

b) À l'aide du théorème de transfert, montrer que pour toute fonction f , $\mathbb{E}(f(T)) = (1-p)^2 f(0) + 2p(1-p)f(1) + p^2 f(2)$

c) Soit la grandeur $\theta = 2008 - p$. Montrer que $\hat{\theta} = 2008 - \frac{1}{2}T$ est un estimateur de θ non biaisé.

d) Soit $\theta = (1-p)^2$, montrer que $\hat{\theta}(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } T=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est un estimateur de θ non biaisé

e) Soit $\theta = (1-3p)^2$, montrer que $\hat{\theta}(T) = (-2)^T$ est sans biais pour θ .

Statistiques - Fiche d'exercices n°2

Exercice 2:

Soit $X_1, \dots, X_n$ un ensemble de variables aléatoires de Bernoulli iid telles que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i \hookrightarrow \text{Ber}(p)$

On considère les estimateurs suivants :

$$T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad T_2 = \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} X_i$$

1°) En étudiant les valeurs prises par T_2 en fonction des valeurs prises par les $X_i \hookrightarrow \text{Ber}(p)$, donner la loi de T_2 en fonction de p et n .

Indication : établir l'événement $\{T_2=1\}$ en fonction des X_i ,
idem pour $\{T_2=0\}$

2°) T_1 et T_2 sont-ils des estimateurs sans biais de p ?

3°) Montrer que : $EQM(T_1) = \frac{p(1-p)}{n}$ et $EQM(T_2) = p^n - 2p^{n+1} + p^2$

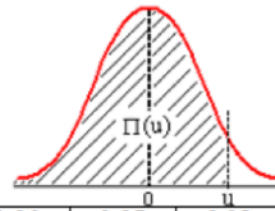
4°) On étudie le cas $n=2$. Quel estimateur est le plus performant ?
(en fonction de $p \in [0, 1]$)

5°) Étudier les limites de $EQM(T_1)$ et $EQM(T_2)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Conclure

Statistiques - Fiche d'exercices n°2

Dans ce TD on utilise un tableau de valeurs de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, donné ci-dessous:

Table de Loi Normale
 $P(x < u)$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8254	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

Si $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$, on notera :

$$\mathbb{P}[Y \leq t] = \phi(t), t \geq 0 \quad (1)$$

La valeur de t au dixième près se lit dans la 1ère colonne du tableau, et les centièmes dans les colonnes suivantes. La probabilité associée $\phi(t)$ est au croisement du dixième et du centième choisi. Ex en violet: $t = 1.41$, $\phi(t) = 0.9207$

Statistiques - Fiche d'exercices n°2

Exercice 3:

X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

À l'aide du tableau:

a) Calculer $P(X \leq 1)$, $P(0 < X \leq 1.42)$, $P(X \geq 1.13)$

La propriété de symétrie de la loi normale donne: $(P(a < X) = P(-a > X))$

b) Calculer $P(-0.75 < X)$, $P(-0.75 \leq X \leq 0)$

c) Trouver t tel que $P(X \leq t) = 0.8238$, $P(X \leq t) = 0.1112$, $P(0 < X < t) = 0.4878$,

d) Déterminer l'expression générale de $P(|X| < t)$ en fonction de $\phi(t)$.

Application numérique: $P(|X| < t) = 0.9$

Exercice 4:

Un tube électronique a une durée de vie qui, exprimée en heures est une variable aléatoire $X \sim \mathcal{N}(160, 30^2)$.

1. Trouver a, b tels que $Y = \frac{X - a}{b}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
2. Trouver $p = P(X \geq 200)$
3. Trouver réels c et d vérifiant $P(X < c) \geq 0.95$ et $P(X \geq d) \geq 0.8$
4. Calculer la probabilité conditionnelle $q = P(X \geq 200 \mid X \geq 160)$, comparer p et q .

Statistiques - Fiche d'exercices n°2

Exercice 5:

On dispose d'une boîte contenant des boules de k couleurs différentes (de même fréquence).

On souhaite s'entraîner à faire un tour de magie et prédire les couleurs des boules qu'on tire.

1 - On annonce une couleur (ex rouge) présente dans l'urne.

Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge au 1^{er} lancer?
Donner la loi, et la valeur de k qui maximise cette probabilité.

2 - On s'intéresse à 3 tirages consécutifs avec remise en essayant de reproduire l'événement suivant :

E : "la première et 3^{ème} boule sont de même couleur et la 2^{ème} est d'une couleur différente."

a) Écrire cette probabilité (on la notera $\mathbb{P}(E|k)$), en supposant que les tirages sont indépendants.

b) Trouver la valeur de k qui maximise $\mathbb{P}(E|k)$

3 - Faire de même avec l'événement suivant sur 4 tirages :

E : "la première et 3^{ème} boule sont de même couleur et la 2^{ème} et 4^{ème} sont de 2 couleurs différentes"